Beoordelingsmodel

Vraag	Antwoord	Scores

Bewegend punt

1 maximumscore 4

- ($1-t^2=0$ geeft $t=-1$ of $t=1$; $y(-1)=0$, dus) bij punt A hoort $t=1$ — 1
- $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-2t$ en $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=2(1+t)$ — 1
- $\left[\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right]_{t=1}=-2$ en $\left[\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right]_{t=1}=4$ — 1
- De snelheid is ($\sqrt{(-2)^2+4^2}=$) $2\sqrt{5}$ (of $\sqrt{20}$) — 1

2 maximumscore 4

- $x+y=1-t^2+1+2t+t^2$ — 1
- $x+y=2(1+t)$ (of $x+y=2+2t$) — 1
- $(x+y)^2=4(1+t)^2$ — 1
- $4y=4(1+t)^2$ (dus is $(x+y)^2=4y$) — 1

of

- Te bewijzen is $(1-t^2+(1+t)^2)^2=4(1+t)^2$ (voor elke waarde van t) — 1
- $1-t^2+(1+t)^2=2+2t$ — 1
- $(2+2t)^2=4+8t+4t^2$ — 1
- $4(1+t)^2=4+8t+4t^2$ (dus is $(x+y)^2=4y$) — 1

Lijn door de toppen

3 maximumscore 4

- $f_a'(x)=0$ geeft $e^{ax}(1+ax)=0$ 1
- ($e^{ax}\neq 0$) dus $1+ax=0$, dus (voor de x-coördinaat van de top geldt) $x=-\frac{1}{a}$ 1
- Voor de y-coördinaat van de top geldt $y=f_a\left(-\frac{1}{a}\right)=-\frac{1}{a}\cdot e^{-1}$ 1
- Dit is gelijk aan $\frac{1}{e}\cdot-\frac{1}{a}$ (dus de top ligt op lijn l) 1

of

- $f_a'(x)=0$ geeft $e^{ax}(1+ax)=0$ 1
- ($e^{ax}\neq 0$) dus $1+ax=0$, dus (voor de x-coördinaat van de top geldt) $x=-\frac{1}{a}$ 1
- Uit $x=-\frac{1}{a}$ volgt $a=-\frac{1}{x}$ 1
- Invullen in f_a geeft $y=xe^{-\frac{1}{x}\cdot x}=\frac{1}{e}x$ (dus de top ligt op lijn l) 1

of

- $f_a(x)=\frac{1}{e}x$ geeft $e^{ax}=\frac{1}{e}$ ($x=0$ voldoet niet) 1
- Dus $ax=-1$, dus $x=-\frac{1}{a}$ 1
- $f_a'\left(-\frac{1}{a}\right)=e^{a\cdot-\frac{1}{a}}+a\cdot-\frac{1}{a}e^{a\cdot-\frac{1}{a}}$ 1
- Dit is gelijk aan $e^{-1}-e^{-1}=0$ (dus de top ligt op lijn l) 1

4 maximumscore 3

- (Er moet gelden: $F_a'(x)=f_a(x)$;) de afgeleide van e^{ax} is $e^{ax}\cdot a$ 1
- De afgeleide van $\frac{1}{a^2}e^{ax}$ is $\frac{1}{a^2}e^{ax}\cdot a=\frac{1}{a}e^{ax}$ 1
- Toepassen van de productregel geeft $F_a'(x)=\frac{1}{a}e^{ax}+\frac{1}{a}x\cdot ae^{ax}-\frac{1}{a}e^{ax}=xe^{ax}$ ($=f_a(x)$) 1

Opmerking
Als een kandidaat bij het differentiëren de kettingregel beide keren niet of niet correct heeft toegepast, dan geen scorepunten toekennen voor het eerste en tweede antwoordelement.

5 **maximumscore 5**

- $xe^x = \frac{1}{e}x$ geeft $x = 0$ of $e^x = e^{-1}$, dus $x = 0$ of $x = -1$ — 1
- De gevraagde oppervlakte is gelijk aan $\int_{-1}^{0}\left(\frac{1}{e}x - xe^x\right)dx$ — 1
- Een primitieve van $\frac{1}{e}x$ is $\frac{1}{2e}x^2$ — 1
- Een primitieve van $\frac{1}{e}x - xe^x$ is $\frac{1}{2e}x^2 - xe^x + e^x$ — 1
- De oppervlakte is gelijk aan $1 - \frac{1}{2e} - \frac{2}{e}$ $(= 1 - \frac{5}{2e})$ — 1

of

- $xe^x = \frac{1}{e}x$ geeft $x = 0$ of $e^x = e^{-1}$, dus $x = 0$ of $x = -1$ — 1
- De gevraagde oppervlakte is gelijk aan het verschil van $-\int_{-1}^{0} xe^x dx$ en de oppervlakte van driehoek OPQ met P het snijpunt van l en de grafiek van f_1 en Q de loodrechte projectie van P op de x-as — 1
- ($f_1(-1) = -\frac{1}{e}$, dus) de gevraagde oppervlakte is gelijk aan $-\int_{-1}^{0} xe^x dx - \frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{1}{e}$ — 1
- Een primitieve van xe^x is $xe^x - e^x$, dus de gevraagde oppervlakte is gelijk aan $-\left[xe^x - e^x\right]_{-1}^{0} - \frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{1}{e}$ — 1
- De oppervlakte is gelijk aan $1 - \frac{2}{e} - \frac{1}{2e}$ $(= 1 - \frac{5}{2e})$ — 1

Zwaartepunt en rakende cirkels

6 maximumscore 5

- Een vergelijking van c is $(x-14)^2+(y-8)^2=10^2$ — 1
- De vergelijking $(x-14)^2+(0-8)^2=10^2$ moet worden opgelost — 1
- Uit $(x-14)^2=36$ volgt voor A: $x=8$ en voor B: $x=20$ — 1
- Voor het zwaartepunt Z geldt $\overrightarrow{OZ}=\frac{3}{6}\cdot\begin{pmatrix}8\\0\end{pmatrix}+\frac{1}{6}\cdot\begin{pmatrix}20\\0\end{pmatrix}+\frac{2}{6}\cdot\begin{pmatrix}14\\8\end{pmatrix}$ — 1
- De coördinaten zijn $\left(12, 2\frac{2}{3}\right)$ — 1

of

- $AP^2+PM^2=AM^2$, waarbij P de loodrechte projectie van M op de x-as is — 1
- Dus $AP^2+8^2=10^2$, waaruit volgt $AP\ (=BP)=6$ — 1
- Hieruit volgt voor A: $x\ (=14-6)=8$ en voor B: $x\ (=14+6)=20$ — 1
- Voor het zwaartepunt Z geldt $\overrightarrow{OZ}=\frac{3}{6}\cdot\begin{pmatrix}8\\0\end{pmatrix}+\frac{1}{6}\cdot\begin{pmatrix}20\\0\end{pmatrix}+\frac{2}{6}\cdot\begin{pmatrix}14\\8\end{pmatrix}$ — 1
- De coördinaten zijn $\left(12, 2\frac{2}{3}\right)$ — 1

of

- $PM=8$ en $AM=10$, waarbij P de loodrechte projectie van M op de x-as is; dus driehoek APM is een 3-4-5-driehoek — 1
- Hieruit volgt $AP\ (=BP)=6$ — 1
- Hieruit volgt voor A: $x\ (=14-6)=8$ en voor B: $x\ (=14+6)=20$ — 1
- Voor het zwaartepunt Z geldt $\overrightarrow{OZ}=\frac{3}{6}\cdot\begin{pmatrix}8\\0\end{pmatrix}+\frac{1}{6}\cdot\begin{pmatrix}20\\0\end{pmatrix}+\frac{2}{6}\cdot\begin{pmatrix}14\\8\end{pmatrix}$ — 1
- De coördinaten zijn $\left(12, 2\frac{2}{3}\right)$ — 1

Opmerkingen

– *De vectoren mogen ook genoteerd worden als* $(8,0)$, $(20,0)$ *en* $(14,8)$.

– *Als het eindantwoord genoteerd wordt als* $\begin{pmatrix}12\\2\frac{2}{3}\end{pmatrix}$, *voor deze vraag maximaal 4 scorepunten toekennen.*

7 maximumscore 5

- $MN = r + 10$, waarbij r de straal van cirkel d is — 1
- $NP = 14 - r$, waarbij P de loodrechte projectie van M op de x-as is — 1
- $MP = 8$, dus geldt $(14 - r)^2 + 8^2 = (r + 10)^2$ — 1
- Herleiden tot een lineaire vergelijking als $260 - 28r = 20r + 100$ — 1
- Oplossen geeft straal $3\frac{1}{3}$ — 1

Maxima en minima

8 maximumscore 6

- $f'(x) = 6\cos(x) + 2\sin(2x)$ — 2
- $2\sin(2x) = 4\sin(x)\cos(x)$ — 1
- $f'(x) = 0$ geeft $2\cos(x) \cdot (3 + 2\sin(x)) = 0$ — 1
- $3 + 2\sin(x) = 0$ geeft $\sin(x) = -1\frac{1}{2}$; deze vergelijking heeft geen oplossingen — 1
- $\cos(x) = 0$ geeft $x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$ (met k geheel) — 1

Opmerking
Als een kandidaat bij het differentiëren de kettingregel niet of niet correct heeft toegepast, voor deze vraag maximaal 4 scorepunten toekennen.

9 maximumscore 4

- Het lijnstuk zit op hoogte $f(1\frac{1}{2}\pi - 1)$ (of $f(1\frac{1}{2}\pi + 1)$) — 2
- $f(1\frac{1}{2}\pi - 1) = -3,657...$ — 1
- ($-3,657... - -5 = 1,342...$ dus) de gevraagde afstand is 1,34 — 1

of

- De vergelijking $f(x) = f(x + 2)$ (of $f(x) = f(x - 2)$) moet worden opgelost — 1
- Beschrijven hoe de vergelijking $f(x) = f(x + 2)$ kan worden opgelost — 1
- Dat geeft ($x = 3,712...$ met) $y = -3,657...$ (andere oplossingen voldoen niet) — 1
- ($-3,657... - -5 = 1,342...$ dus) de gevraagde afstand is 1,34 — 1

Opmerking
Voor het eerste antwoordelement van het eerste alternatief uitsluitend 0 of 2 scorepunten toekennen.

Sheffield Winter Garden

10 maximumscore 4

- $d = f_{0,7}(3) - f_{0,7}(0)$ 1
- $d = 4,49...$ 1
- De vergelijking $0,7 = \dfrac{8 \cdot 4,49...}{l^2 - 4 \cdot 4,49...^2}$ moet worden opgelost 1
- (Dit geeft $l = 11,491...$ dus) de gevraagde lengte is $11,49$ 1

11 maximumscore 5

- $h(x) = -f_k(x) + c$ (voor een zekere waarde van c) 1
- $k = \dfrac{8 \cdot 20,51}{49,63^2 - 4 \cdot 20,51^2}$ $(= 0,21...)$ 1
- Bij de beeldgrafiek van de grafiek van $f_{0,21...}$ na spiegeling in de x-as hoort de functie $g(x) = -2,37...(\mathrm{e}^{0,21...x} + \mathrm{e}^{-0,21...x})$ (of $g(x) = -\dfrac{1}{2 \cdot 0,21...}(\mathrm{e}^{0,21...x} + \mathrm{e}^{-0,21...x})$) 1
- $g(0) = -4,75...$ 1
- De top ligt op hoogte 20,51, dus een functievoorschrift van h is $h(x) = 25,27 - 2,38(\mathrm{e}^{0,21x} + \mathrm{e}^{-0,21x})$ (of een gelijkwaardige uitdrukking) 1

Opmerking
Als in het eindantwoord ook e *op twee decimalen (correct) wordt afgerond, hiervoor geen scorepunten in mindering brengen.*

Natuurlijke logaritme van de wortel

12 maximumscore 3

- (Voor een punt (x, y) op de grafiek van f^{inv} geldt) $x = \ln\left(\sqrt{y}\right)$ — 1
- Dus $e^x = \sqrt{y}$ — 1
- Hieruit volgt $f^{\text{inv}}(x) = \left(e^x\right)^2$, dus $f^{\text{inv}}(x) = e^{2x}$ — 1

of

- (Voor een punt (x, y) op de grafiek van f^{inv} geldt) $x = \ln\left(\sqrt{y}\right)$ — 1
- ($x = \ln\left(y^{\frac{1}{2}}\right)$, dus) $x = \frac{1}{2}\ln(y)$, dus $2x = \ln(y)$ — 1
- Hieruit volgt $f^{\text{inv}}(x) = e^{2x}$ — 1

of

- f is de samengestelde functie van $y = \sqrt{x}$ en $y = \ln(x)$ — 1
- f^{inv} is dus de samengestelde functie van $y = e^x$ en $y = x^2$ — 1
- Hieruit volgt $f^{\text{inv}}(x) = \left(e^x\right)^2$, dus $f^{\text{inv}}(x) = e^{2x}$ — 1

13 maximumscore 4

- De lengte van het lijnstuk is $g(x) - f(x)$ — 1
- $g(x) = \frac{1}{2} \cdot e^{2x}$ — 1
- Beschrijven hoe het minimum van $g(x) - f(x)$ berekend kan worden — 1
- De minimale lengte van het lijnstuk is 1,512 — 1

14 maximumscore 4

- Het bepalen van de x-coördinaat van de perforatie:
  uit $\ln(x) = 0$ volgt $x = 1$ (en er geldt $\ln\left(\sqrt{1}\right) = 0$) of:
  uit $\ln\left(\sqrt{x}\right) = 0$ volgt $x = 1$ (en er geldt $\ln(1) = 0$) of:
  uit $\ln(x) = 0$ en $\ln\left(\sqrt{x}\right) = 0$ volgt $x = 1$ — 1
- Er geldt $\ln\left(x^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2}\ln(x)$ — 1
- (Voor $x \neq 1$ en $x > 0$) geldt $h(x)$ $\left(= \dfrac{\ln\left(x^{\frac{1}{2}}\right)}{\ln(x)}\right) = \dfrac{\frac{1}{2}\ln(x)}{\ln(x)} = \frac{1}{2}$ — 1
- De coördinaten van de perforatie zijn dus $\left(1, \frac{1}{2}\right)$ — 1

Vierkant onder grafiek

15 maximumscore 4

- Er moet gelden $f(1+p)=p$, met p de lengte van de zijde van het vierkant 1
- $\frac{1}{1+p}=p$ geeft $p^2+p-1=0$ 1
- Dit geeft $p=\frac{-1\pm\sqrt{1+4}}{2}$ 1
- De lengte van de zijde is $-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5}$ (of $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$) ($-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{5}$ voldoet niet) 1

of

- Er moet gelden $f(q)=q-1$, met q de x-coördinaat van het hoekpunt rechtsonder 1
- $\frac{1}{q}=q-1$ geeft $q^2-q-1=0$ 1
- Dit geeft $q=\frac{1\pm\sqrt{1+4}}{2}$ 1
- $q-1=\frac{1\pm\sqrt{1+4}}{2}-1$, dus de lengte van de zijde is $-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5}$ (of $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$) ($-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{5}$ voldoet niet) 1

of

- De diagonaal van het vierkant door het hoekpunt rechtsboven ligt op de lijn met vergelijking $y=x-1$ 1
- Voor de x-coördinaat van het hoekpunt rechtsboven geldt $x-1=\frac{1}{x}$, ofwel $x^2-x-1=0$ 1
- Dit geeft $x=\frac{1\pm\sqrt{1+4}}{2}$ 1
- $x-1=\frac{1\pm\sqrt{1+4}}{2}-1$, dus de lengte van de zijde is $-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5}$ (of $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$) ($-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{5}$ voldoet niet) 1

Twee vierkanten op een kwartcirkel

16 maximumscore 5

- Er moet gelden $AC^2 = 2 \cdot BC^2$ (of $AC = \sqrt{2} \cdot BC$) 1
- $AC^2 = (1 - \cos(t))^2 + (\sin(t))^2$ (of een gelijkwaardige uitdrukking, zoals $2 - 2\cos(t)$) 1
- $BC^2 = (\cos(t))^2 + (1 - \sin(t))^2$ (of een gelijkwaardige uitdrukking, zoals $2 - 2\sin(t)$) 1
- Beschrijven hoe de vergelijking $(1 - \cos(t))^2 + (\sin(t))^2 = 2((\cos(t))^2 + (1 - \sin(t))^2)$ (voor $0 < t < \frac{1}{2}\pi$) opgelost kan worden 1
- $t \approx 0{,}93$ 1

of

- Er moet gelden $AC^2 = 2 \cdot BC^2$ (of $AC = \sqrt{2} \cdot BC$) 1
- $AC^2 = 1 + 1 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos(t) = 2 - 2\cos(t)$ 1
- $BC^2 = 1 + 1 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos(\frac{1}{2}\pi - t) = 2 - 2\cos(\frac{1}{2}\pi - t)$ 1
- Beschrijven hoe de vergelijking $2 - 2\cos(t) = 2 \cdot (2 - 2\cos(\frac{1}{2}\pi - t))$ (voor $0 < t < \frac{1}{2}\pi$) opgelost kan worden 1
- $t \approx 0{,}93$ 1

of

- Er moet gelden $AC^2 = 2 \cdot BC^2$ (of $AC = \sqrt{2} \cdot BC$) 1
- $\sin(\frac{1}{2}t) = \dfrac{\frac{1}{2}AC}{OC}$, ofwel $\sin(\frac{1}{2}t) = \frac{1}{2}AC$, dus $AC = 2\sin(\frac{1}{2}t)$ 1
- $\sin(\frac{1}{2}\angle BOC) = \dfrac{\frac{1}{2}BC}{OC}$, ofwel $\sin(\frac{1}{2}(\frac{1}{2}\pi - t)) = \frac{1}{2}BC$, dus $BC = 2\sin(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}t)$ 1
- Beschrijven hoe de vergelijking $(2\sin(\frac{1}{2}t))^2 = 2 \cdot (2\sin(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}t))^2$ (voor $0 < t < \frac{1}{2}\pi$) opgelost kan worden 1
- $t \approx 0{,}93$ 1

Vraag	Antwoord	Scores

17 **maximumscore 4**

- $\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CF}$ 1
- $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos(t) \\ 1-\sin(t) \end{pmatrix}$ 1
- ($\overrightarrow{CF}$ is het beeld van $\overrightarrow{CB}$ bij een rotatie over $-90°$, dus)
  $\overrightarrow{CF} = \begin{pmatrix} 1-\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}$ 1
- $\overrightarrow{OF} = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1-\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\sin(t)+\cos(t) \\ \sin(t)+\cos(t) \end{pmatrix}$ 1

of

- $x_F = x_C + (x_F - x_C) = x_C + (y_B - y_C)$ 1
- $x_F = \cos(t) + 1 - \sin(t)$ 1
- $y_F = y_C + (y_F - y_C) = y_C + (x_C - x_B)$ 1
- $y_F = \sin(t) + \cos(t)$ (dus de formule voor $\overrightarrow{OF}$ is juist) 1